mathextender!

thought by Async
written in LaTeX

Essential note: gramatické chyby, nechť si každý opraví,— **sám**

1 Komplexní čísla jsou víc než pouhé "i".

Motto: *Když si nejsi jist analytickým řešením, spočti to numericky – sice těžkopádně, pro některé hloupě, ale za to jistě s chybou, ale ne v řádech!*

Začneme jedním ze "skvostů" matematiky:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \tag{1}$$

Kdo nevěří, což je chválihodné, nechť prověří:

Exponenciela e^x má zajímavou vlastnost v okolí bodu $x = 0$, chová se totiž jako přímka (lineární funkce) $y = x + 1$. Této vlastnosti lze využít pro výpočet e^x i pro $x \in R$. Lze psát:

$$e^{\Delta x} = 1 + \Delta x + o((\Delta x)^2) \qquad \Delta x \to 0 \tag{2}$$

Záhadné $o((\Delta x)^2)$ je chyba, jež je zanedbatelná oproti Δx.

$$(e^{\Delta x})^n = e^{\Delta x n} \qquad x \in R, n \in N$$

indukcí podle exponentu n lze ukázat:

$$(e^{\Delta x})^n = e^{\Delta x n} = (1 + \Delta x + o((\Delta x)^2))^n = (1 + \Delta x)^n + o((\Delta x)^2), \quad \Delta x \to 0$$

srozumitelně tedy:

$$e^{\Delta x n} \simeq (1+\Delta x)_1 \cdot (1+\Delta x)_2 \ldots (1+\Delta x)_n = \prod_{i=1}^{n}(1+\Delta x),\ \Delta x \to 0, \quad n \in N \tag{3}$$

protože umíme umocňovat celými čísly je snadné vypočítat i $e^x, x \in R$.

Pokud zvolíme $\Delta x = x/n$ potom dosazením do výrazu (3) dostaneme:

$$(e^{\frac{x}{n}})^n = e^{\frac{x}{n}n} = e^x \simeq (1+\frac{x}{n})^n \qquad n \to \infty \Rightarrow \Delta x \to 0$$

což lze přepsat na limitu:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \tag{4}$$

pokud položíme $k = xn$:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{k})^k = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{xn})^{xn} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{xn}$$

Příklad 1. Vypočtete e^π bez pomoci instrukce F2XM1 (2^x) a FLDL2E (konstanta $log_2 e$). Obě instrukce podporuje FPU[1] Pentia. Předpokládáme dostupnost kalkulátoru, jež je obdařen schopností násobit ;-).

Řešení. Budeme iterovat výraz (4) pro $n = 100$, $\frac{x}{n} = \Delta x = \pi/100 \doteq 0.031415926$: [2]

$$(1+0.031415926)_1 \cdot (1+0.031415926)_2 \ldots (1+0.031415926)_{100} \doteq 22.$$

Výsledek "FPU": 23, 14, náš výsledek je 22, pro $n = 1000$ je rozdíl hodnot pouze 0, 11 (lepší jak 5%).

`Poznámka.` Výraz (4) lze rozvinout pomocí binomické věty v řadu:

$$(1+\frac{x}{n})^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{x^3}{n^3} + \ldots \tag{5}$$

Výraz $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!n^k}$ (naštěstí) konverguje pro $n \to \infty$ k $1/k!$, pro $k = 1$ je $\frac{n!}{(n-k)!k!n^k} = 1/k$ triviálně splněn. Úpravou (5) získáme rozvoj exponeciální fce do mocninné řady:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{k!} \tag{6}$$

[1] Floating Point Unit = počítadlo pro čísla s plovoucí čárkou

[2] Pozn. doporučuji použít funkce x^y, jinak se umačkáte!

Jak dostat do hry i ? Podle (4):

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$$

pak také ($y = x/k$):

$$e^{ky} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{ky}{n})^n$$

pak také:

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{ix}{n})^n$$

Nyní máme vše připraveno na "matematický experiment" (stejnou iterační metodu jako v příkladu 1).

Laboratorní pomůcky:

PC (stačí starší stroj min. 286).

Hlava znalá: (C) OR (C++) OR (Pascal) OR (Delphi) OR (Java) OR (PHP) ... OR (jakýkoliv tabulkový procesor).

Výpočet sestavte následovně:
krok 1. $(1 + i\Delta x)$
krok 2. $(1 + i\Delta x)(1 + i\Delta x) = (1 + 2i\Delta x - \Delta x^2)$ do jedné "škatulky" dejte $\Re(1 + i\Delta x)^2 = 1 - \Delta x^2$ do druhé $\Im(1 + i\Delta x)^2 = 2i\Delta x$
krok 3. $(a + ib)(1 + i\Delta x)$, kde a je reálná část ($\Re$) z předchozího kroku, b je imaginární část ($\Im$). Nyní tedy padne do škatulky a ($\Re$) $a - b\Delta x$ a do škatulky b ($\Im$) $i(a\Delta x + b)$.
Opakujte n-krát.

`Poznámka.` Lépe se bude problém programovat tak, že mám 2 promněnné: Re, Im. Na začátku je inicializuji $Re = 1$, $Im = 0$. Zacyklím se ve smyčce: výsledek pro každý krok bude:

$Re = a - b \cdot \Delta x = Re - Im \cdot \Delta x$,
$Im = a \cdot \Delta x + b = Re \cdot \Delta x + Im$
Δx doporučuji volit max. 0,01 pro dosažení malého zkreslení.

Výsledek je až strhující — v proměnné Re "skáče" cosinus, v Im sinus! (pro vizualizaci tohoto "efektu" je nutné vynášet do grafu alespoň 50 vzorků ze všech iterační kroků za periodu 2π).

`Poznámka.` Kdo si takto "nezahraje" a "nerýpe", nezjistí ještě jednu zajímavou věc: Pokud zvolíte $i \cdot i = 1$, pak namísto cosinu vznikne hyperbolický cosinus, namísto sinu zas hyperbolický sinus. Víc obrázků s více rozměrnými čísly: *http://asyncbrain.baf.cz/m/nt/index.htm.*

Na místě je analytický "důkaz": Podle (6):

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots + \frac{(ix)^n}{k!} \tag{7}$$

každé i^{2n} (sudé) je reálné, každé i^{2n+1} (liché) je imaginární. Zbývá určit znaménka:
Nechť existuje číslo i^k, jestliže je zbytek po celočíselném dělení $k/4$

zbytek	pak...	exampla
0	pak $i^k = 1$	$(i^0 = 1,\ ii \cdot ii = -1 \cdot -1 = 1)$,
1	pak $i^k = i$	$(i^1 = i,\ ii \cdot ii \cdot i = -1 \cdot -1 \cdot i = i)$,
2	pak $i^k = -1$	$(i^2 = -1,\ ii \cdot ii \cdot ii = -1 \cdot -1 \cdot -1 = -1)$,
3	pak $i^k = -i$	$(i^3 = -i,\ ii \cdot ii \cdot ii \cdot i = -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot i = -i)$.

potom lze (7) zjednodušit:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} \ldots \tag{8}$$

Reálná složka výrazu (8):

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

což je opravdu Taylorův rozvoj fukce cosinus.

Imaginární složka výrazu (8):

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

což je opravdu Taylorův rozvoj fukce sinus.

2 Vysvobození sklerotiků, aneb ti, co "neudrží"...

Pokud máte problémy s "vzorečky" pro sin, cos, tg ... pamatujte si jen tohle:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad ii = -1$$

Vzorec pro dvojnásobný úhel: $e^{2i\alpha} = e^{(i\alpha)^2} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + i2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)$, "roztržením" na reálnou a imaginární část dostáváme:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Vzorec pro součet úhlů:

$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}.e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$

"roztržením" na reálnou a imaginární část dostáváme:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

Dovolím si jednu důležitou poznámku k těmto "vzorečkům: Jedá se totiž o rotaci vektoru v ploše, nebo vzájemnou rotaci kartézských souřadnicových soustav. Výrazy:

$$x_0 = \cos\varphi, \qquad y_0 = \sin\varphi$$

popisují transfomoraci vektoru jednotkové velikosti z polárního souřadnicového systému do kartézského.

Pro rotaci kartézských souřadnic se v [1] zavádí (doporučuji přečíst kapitolu 11 (Vektory - rotace), je tam hezké geometrické odvození):

Nechť x_0 a y_0 jsou složky vekotoru v nerotované soustavě "XY_0", nechť x_ϱ a y_ϱ jsou složky téhož vektoru (stejná velikost i směr) v nové soustavě "XY_ϱ" rotované o úhel ϱ oproti "XY_0" ($+\varrho$ proti směru hodinových ručiček), potom:

$$x_\varrho = x_0\cos\varrho + y_0\sin\varrho \qquad y_\varrho = y_0\cos\varrho - x_0\sin\varrho \tag{9}$$

V polárních souřadnicích dostaneme stejný výsledek pouhým **rozdílem** úhlů $\varphi - \varrho$, protože (9) popisuje rotaci soustavy, je tedy nutné vektor posunout zpět, aby zůstal zachován směr. Pokud dosadíme do (9) $x_0 = \cos\varphi$, $y_0 = \sin\varphi$ a $x_\varrho = \cos(\varphi-\varrho)$, $y_\varrho = \sin(\varphi-\varrho)$, potom získáme součtové vzorce, nebo lépe transformace složek vektorů rotovanehého vektoru ($+\varrho$) nebo rotované soustavy ($-\varrho$) o úhel ϱ:
rotace vektoru:
Složka X:

$$\cos(\varphi+\varrho) = \cos\varphi\cos\varrho - \sin\varphi\sin\varrho$$

Složka Y:

$$\sin(\varphi+\varrho) = \cos\varphi\sin\varrho + \sin\varphi\cos\varrho$$

rotace soustavy:
Složka X:

$$\cos(\varphi-\varrho) = \cos\varphi\cos\varrho + \sin\varphi\sin\varrho$$

Složka Y:

$$\sin(\varphi - \varrho) = \sin\varphi\cos\varrho - \cos\varphi\sin\varrho$$

`Poznámka.` Jak se prohodila znaménka: fce sinus je lichá: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ a cosinus je fce sudá: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, nakreslete si jejich půběhy, cosinus lze zrcadlit podle osy y, ježto sinus nelze bez otočení znaménka.

`Poznámka.` $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ je pythagorova věta – poloměr kružnice je 1, čili není problém odpovědět na otázku kolik je absolutní hodnota z e^{ix}, ano je to 1.

Vzorec pro poloviční úhel:

$$e^{i\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{e^{i\alpha}} = \sqrt{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}$$

umocněním:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} + i2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

reálná část výrazu je:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1)$$

$$\cos\alpha = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

zde se musíme zastavit: $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ "maže" znaménko!

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \text{pro všechna } \alpha \in \langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle \quad (1)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \text{pro všechna } \alpha \in \langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\rangle \quad (2)$$

obdobně lze dosazením $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ získat:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad \text{pro všechna } \alpha \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \quad (3)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad \text{pro všechna } \alpha \in \langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\rangle \quad (4)$$

imaginární část výrazu je nezajímavá, jelikož $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ je to samé jako $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$

3 Když komplexní, tak komplexní!

$$e^{i\pi} = -1$$
$$? = \ln(-1)?$$
$$? = i^i?$$
$$? = \log_{i\pi}(x)?$$
$$? = a^{ix}?$$

Například $\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi)$ — hledáme $\arccos(-1)$, protože $i\sin(\varphi)$ musí být nulová!

a^{ix} je standardní aplikace $a^x = e^{x\ln a}$, takže $a^{ix} = e^{ix\ln(a)}$. Detailní pohled:

$$a^x = 1 + \ln(a)x, \qquad x \to 0$$

konstanta $\ln(a)$ potom vystupuje i ve výrazu $e^{i\ln a\varphi} = \cos(\ln a\varphi) + i\sin(\ln a\varphi)$

Ti, kdo touží poznat $\log_{i\pi}(x)$, cesta je otevřená.

`Poznámka.` Zajímavostí je, že $ii = -1$ přináší nové fce, které jsou nevyjádřitelné konečnou kombinací algebraických fcí. $ii = 1$ nic nového nepřináší — $\cosh\varphi$ i $\sinh\varphi$ je vyjádřitelná pomocí e^φ.

4 Slavná, i když banální Moivreova věta.

Nutno si uvědomiti, že není rozdílu mezi $e^{i\varphi}$ a $e^{i(\varphi+2k\pi)}$, je tedy *lepší* používati formy obecnější, neb nás nesvede na zcestí:

$$\sqrt[n]{e^{i(\varphi+2k\pi)}} = \left(e^{i(\varphi+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{\varphi}{n}+i\frac{2k\pi}{n}}$$

Došlo rázem ke změně: $e^{i\frac{\varphi}{n}+i\frac{2k\pi}{n}}$ již není stejné pro jakékoliv k!, stejné "sekvence" čísel dostáváme každým *celočíselným násobkem* k/n, proto vznikne právě n čísel:

$$\begin{aligned}
x_0 &= e^{i\frac{\varphi}{n}} \\
x_1 &= e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n})} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n})} \\
x_n &= e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2n\pi}{n})} = x_0 = e^{i\frac{\varphi}{n}}
\end{aligned}$$

5 Skalární součin mi *nedal*, naštěstí, spát.

Máme zjistit zda

$$\cos\varphi\|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\| = \overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{k} = h_1k_1 + h_2k_2 + \ldots + h_nk_n \qquad \overrightarrow{h},\overrightarrow{k}\in R^n$$

`Poznámka.` R^n je n-rozměrný prostor (každá složka vektoru je reálné číslo, čili 3D $\sim R^3$).

Každé 2 lineárně nezávislé vektory v R^n “generují” R^2 tj. plochu, proto nás bude zajímat pouze

$$\cos\varphi\|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\| = \overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{k} = h_xk_x + h_yk_y \qquad \overrightarrow{h},\overrightarrow{k}\in R^2$$

Projekci vektorů do osy x lze rozepsat: $h_x = \|\overrightarrow{h}\|\cos\alpha$, $k_x = \|\overrightarrow{k}\|\cos\beta$, projekci vektorů do osy y lze rozepsat: $h_y = \|\overrightarrow{h}\|\sin\alpha$, $k_y = \|\overrightarrow{k}\|\sin\beta$.

potom:

$$\cos\varphi\|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\| = \|\overrightarrow{h}\|\cos\alpha\|\overrightarrow{k}\|\cos\beta + \|\overrightarrow{h}\|\sin\alpha\|\overrightarrow{k}\|\sin\beta =$$

$$= \|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\|(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) = \|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\|\cos(\alpha-\beta) = \|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\|\cos\varphi$$

Myslím, že stojí za povšimnutí, že se nám tu zjevila stejná formule jako u rotace soustav:

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$$

Pokud je $\|\overrightarrow{k}\| = 1$, pak skalární součin vrací právě “ixovou” souřadnici vektoru, který je nyní popsán v nové, rotované soustavě o úhel β!

Správného šťouru napadne, a což takhle $\sin(\alpha-\beta)$? Zkusme postupovat zpětně:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

vynásobíme $\|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\|$:

$$\|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\|\sin(\alpha-\beta) = \|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\|\sin\alpha\cos\beta - \|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\|\cos\alpha\sin\beta =$$

$$= \|\overrightarrow{h}\|\sin\alpha\|\overrightarrow{k}\|\cos\beta - \|\overrightarrow{h}\|\cos\alpha\|\overrightarrow{k}\|\sin\beta$$

inu, $h_x = \|\overrightarrow{h}\|\cos\alpha$, $k_x = \|\overrightarrow{k}\|\cos\beta$, $h_y = \|\overrightarrow{h}\|\sin\alpha$, $k_y = \|\overrightarrow{k}\|\sin\beta$ pak se divíme, pokud si matně vzpomeneme na výpočet determinantu...

$$\|\overrightarrow{h}\|\sin\alpha\|\overrightarrow{k}\|\cos\beta - \|\overrightarrow{h}\|\cos\alpha\|\overrightarrow{k}\|\sin\beta = h_yk_x - h_xk_y = \det\begin{pmatrix} h_y & h_x \\ k_y & k_x \end{pmatrix}$$

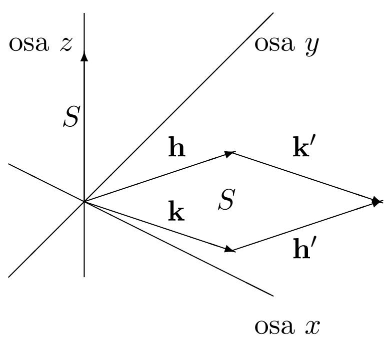
zjistili jsme tedy zajímavost:

$$\cos\varphi\|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\| = \overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{k} = h_y k_y + h_x k_x \qquad \overrightarrow{h},\overrightarrow{k}\in R^2$$

a

$$\sin\varphi\|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\| = \det\begin{pmatrix}\overrightarrow{h}\\ \overrightarrow{k}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}h_y & h_x\\ k_y & k_x\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{h},\overrightarrow{k}\in R^2$$

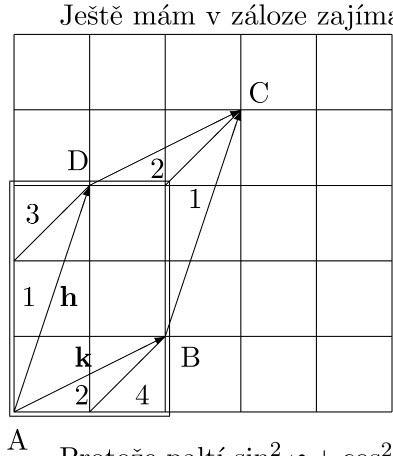
Pokud bude $\|\overrightarrow{k}\| = 1$ pak se $\|\overrightarrow{h}\|$ zobrazí v nové, rotované soustavě, jejíž x-ová osa bude ve směru $\|\overrightarrow{k}\|$ pokud $\|\overrightarrow{k}\| \neq 1$, pak bude vektor zmenšený nebo zvětšený. Tyto formule nám tedy umožňují přepočítat souřadnice při hledání v mapách podle vektoru $\|\overrightarrow{k}\|$— natáčení a zoomování pomocí lupy (pokud jsme již napolovic slepí;-). Mimochodem, onen determinant je také “velikost” vektoru, který vznikne vektorovým součinem $\|\overrightarrow{h}\|\times\|\overrightarrow{k}\|$. Protože jsme v R^2, není kam tento vektor umístit — musíbýt kolmý na oba $\|\overrightarrow{h}\|,\|\overrightarrow{k}\|$ — jediná cesta je zvětšit dimenzi na R^3. V našem případě bude výsledek vektorového součinu osa z (směr), která je kolmá na obě x,y. Viz obr:



Plocha (objem pro R^n, $n > 3$) S ohraničená vektory $\overrightarrow{h}$, $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{h}'$ a $\overrightarrow{k}'$ je rovna:

$$\sin\varphi\|\overrightarrow{h}\|\|\overrightarrow{k}\| = \det\begin{pmatrix}\overrightarrow{h}\\ \overrightarrow{k}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}h_y & h_x\\ k_y & k_x\end{pmatrix}$$

Ještě mám v záloze zajímavost kolem determinantu (“grafický důkaz”):



Plocha čtyřúhelníka $ABCD$ je složena z obsahu $h_y k_x$ (vyznačený obdélník) minus plochy 3,4. Plochy 3,4 jsou ale právě $h_x k_y$

Potom: $S = \det\begin{pmatrix}h_y & h_x\\ k_y & k_x\end{pmatrix} = h_y k_x - h_x k_y$

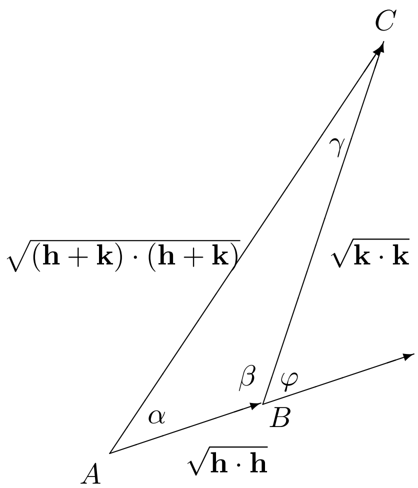
Co je tedy skalární součin?

Protože paltí $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ pak také:

$$\sin^2\varphi(\|\mathbf{h}\|\|\mathbf{k}\|)^2 + \cos^2\varphi(\|\mathbf{h}\|\|\mathbf{k}\|)^2 = (\|\mathbf{h}\|\|\mathbf{k}\|)^2$$

Takže tu máme pythagorovu větu. $\|\mathbf{h}\|\|\mathbf{k}\|$ tvoří obdélník, ten umocněte, vznikne čtyřrozměrný kvádr. Zkuste zformulovat takovou větu!

To je všechno krásné, ale nemáme důkaz platnosti $\mathbf{h}\cdot\mathbf{k} = \|\mathbf{h}\|\|\mathbf{k}\|\cos\varphi$ i pro R^n! Nic lepšího, než co bude následovat mě nenapadlo:



Tohoto obrazu si važte!
Jako začátečník TEXař
jsem se na tom vyblbnul
čísly 2 odpoledne;-)
Na osvěžení paměti:
$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = x_1x_1 + x_2x_2 + \ldots + x_nx_n =$
$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$
$\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|$ délka (norma) vektoru $\mathbf{x}$
Pythagorova věta pro n dimenzí
euklidovského prostoru!

Odvození z kosinové věty bude vypadat následovně:

$$(\mathbf{h}+\mathbf{k})\cdot(\mathbf{h}+\mathbf{k}) = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} + \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} - 2\sqrt{\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}}\sqrt{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}\cos\beta$$

Skalární součin je distributivní a komutativní:

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{h} + \mathbf{h}\cdot\mathbf{k} + \mathbf{k}\cdot\mathbf{h} + \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} + \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} - 2\sqrt{\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}}\sqrt{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}\cos\beta$$

$$2(\mathbf{h}\cdot\mathbf{k}) = -2\sqrt{\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}}\sqrt{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}\cos\beta$$

dvojka se "požere":

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{k} = -\sqrt{\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}}\sqrt{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}\cos\beta$$

což je také:

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{k} = -\|\mathbf{h}\|\|\mathbf{k}\|\cos\beta$$

tu pozor! — náš úhel β je jiný než "φ". β je $\pi-\varphi$ (viz obraz), pro cosinus tedy odvodíme (nejlépe nakresním grafu fce), že $\cos(\pi-\varphi) = -\cos(\varphi)$ tedy:

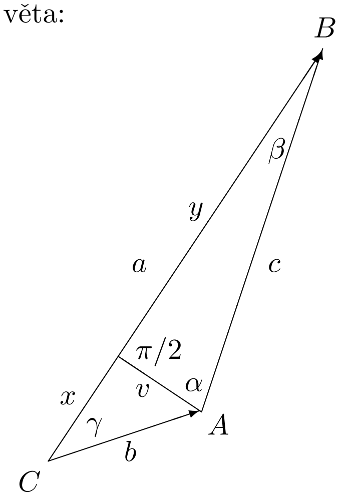
$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{k} = \|\mathbf{h}\|\|\mathbf{k}\|\cos\varphi$$

Nemám rád nedodělanou práci, proto ještě distributivita:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$$

$$(x_1 + y_1) \cdot (x_1 + y_1) + \ldots + (x_n + y_n) \cdot (x_n + y_n) =$$
$$= x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n + y_1 x_1 + \ldots + y_n x_n + y_1^2 + \ldots + y_n^2$$

z čehož vyplývá i komutativita $x_i y_i = y_i x_i$. A ještě ta podezřelá kos(z)inova věta:



a platí:
$x + y = a; \quad x = a - y$
$y = c \cos \beta$
$b^2 = v^2 + x^2; \quad v^2 = b^2 - x^2$
$c^2 = v^2 + y^2; \quad c^2 = b^2 - x^2 + y^2$
$c^2 = b^2 - (a - y)^2 + y^2 = b^2 - a^2 + 2ay$
dosazením za y a přeskupením členů dostáváme:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca \cos \beta$$

Čili, nic nepadá, ale odvozuje se, že?! ;-). Nyní jste mohli vidět výhodu "textového jazyka matiky" oproti geometrii — celkem bez problémů se pohybuji v dimezích, které si sám nedokážu v hlavě představit — to je výhoda "vzorečků"! Pozor — ještě — tento důkaz bylo možné realizovat pouze za vědomosti, že každé dva lineárně nezávislé vektory jsou basí pro dvojdimenzionální útvar – rovinu (plochu). Jelikož výsledný vektor $\sqrt{(\mathbf{h} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{h} + \mathbf{k})}$ je lineární kobinací $\mathbf{h}$ a $\mathbf{k}$, pak také leží v rovině "generované" $\mathbf{h}$, $\mathbf{k}$.

Význam skalárního součinu ve fyzice: Na

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{k} = \|\mathbf{h}\| \|\mathbf{k}\| \cos \varphi$$

se lze také koukat jako na **součin průmětu vektoru h do k(**$= \cos \varphi \|\mathbf{h}\|$**) krát velikost k**. Práce je definována jako součin síly a dráhy na které síla působí($W = Fr$). Obecně pro jakoukoliv dráhu v prostoru pak platí:

$$W = \int_{\mathbf{r1}}^{\mathbf{r2}} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{r}$$

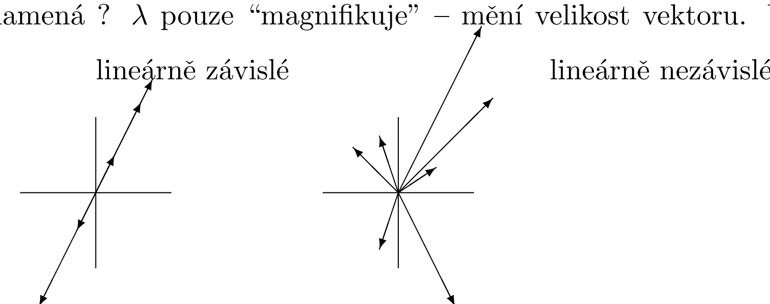
Jedná se jen o sčítání přes nekonečně malé úseky $d\overrightarrow{r}$, protože uvažujeme jakoukoliv dráhu v prostoru. V případě pohybu po přímce odpadá význam skalárního součinu — přechází na normální algebraický součin. V případě pohybu po kružnici je $d\overrightarrow{r}$ stále kolmý k síle $\overrightarrow{F}$, skalární součin je stále nulový, takže pohyb po kružnici nepotřebuje, ani nevydává energii. Pohyb po elipse ale stálou kolmost $\overrightarrow{F}$ a $d\overrightarrow{r}$ nezaručí, naše planeta Země se pohybuje po elipse a proto se v průběhu roku mění její rycholst (stále dochází k přeměnám kinetické a potenciání energie!). Nutno podotknouti, že tohle je docela dobrá aproximace, protože realita není plochá jako euklidovský prostor! (Viz. Obecná teorie relativity).

6 The Day of Independence.

Dva vektory $\mathbf{h}$, $\mathbf{k} \in X^n$[3] jsou lineárně nezávislé právě tehdy když neexistuje $\lambda \neq 0$, takové, že platí: $\mathbf{h} = \lambda\mathbf{k} = (\lambda k_1, \lambda k_2, \ldots, \lambda k_n)$ což lze zobecnit na n vektorů:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{h}_i = 0, \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$$

A co to znamená ? λ pouze "magnifikuje" – mění velikost vektoru. Viz. obr:.



Lineárně závislé vektory mají tedy stejný nebo opačný směr. **Pozor na OBRAZ lineárně nezávislé!** — je tochu nepřesný — uvědomte si, že linární kombinací dvou vektorů *lze* získat třetí *opačný* vektor, který je na obrázku, takže lze najít taková λ_i! Pro sudý počet vektorů to platí také — dva vytvoří nový, který "vynulujeme" dalšími dvěma (jejich lin. kombinací). Souvisí to s basí vektorového prostoru jako minimálním počtem vektorů generujících prostor! Z obázku je nutné uvažovat vždy **dva** *jakékoliv* vektory. Zamystele se nad tím a jak by nám na obrázku pomohlo 7 dimenzí?

6.1 Lineární vectorm!x.

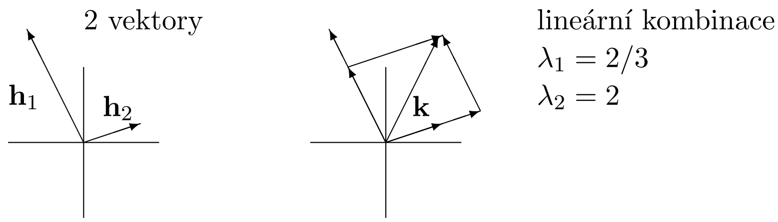
Lineární kombinace vektorů je definována takto:

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{h}_i = \lambda_1 \mathbf{h}_1 + \lambda_2 \mathbf{h}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{h}_n, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$$

jestliže víte jak se sčítají vektory, pak vězte, že tohle je akorát sčítání vektorů s modifikovanou velikostí dle λ_i.

[3] Za X si dosaďte čísla celá, reálná i komplexní.

Lineární kombinace $\lambda\mathbf{h}$ se dá představit na "natahující" se gumě nebo *ideálně pružném* provazu. Čím více provaz natáhnete, tím větší je λ a naopak.



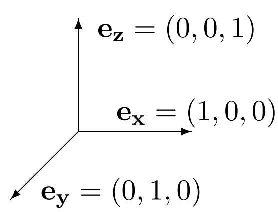
6.2 Nikoliv igelitové, ale lineární obaly!

Lineární obal $\mathcal{L}$ je množina všech lineárních kombinací množiny vektorů $\mathbf{h_i} \in V$:

$$\mathcal{L}(V) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{h}_i\}$$

Ovšem *obal* je tu velmi *zavádějící* pojem. O žádný obal se nejedná, ale jedná se o prostor, který generují vektory z V! Z subkapitoly 6.1 můžete vypozorovat, že pokud uvážíme *všechny* možné lineární kombinace $\mathbf{h_1}$ a $\mathbf{h_2}$, dostaneme *plochu*! Jestliže chcete generovat 3D, pak si vemte 3 lineárně nezávislé vektory. Velmi používaná je jednotková kanonická báze $\mathbf{e}^3$: $\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$



Kdo má apetit na 156 dimenzí, nechť si opatří 156 lineárně nezávislých vektorů (tj. budou tvořeny minimálnňě 156 složkami $\mathbf{e}^{156}$).

6.3 Base "vektorprostoru".

S pojmem base (báze) lineárního prostoru se setkáte hned ve vstuním kurzu lineární algebry. Význam je zcela triviální: Base prostoru V je minimální množství vektorů generujících "náš" vektorprostor V. Pojem minimální množství je ekvivalentní pojmu lineárně nezávislých. Pojem *generuje* je ekvivalentní lineárnímu obalu. Dimenze takového prostoru je rovna *počtu* *minimálního množství* vektorů. Uvědomte si, že pro generování prostoru nemusíte mít na sebe kolmé vektory, ale stačí pouze jejich lin. nezávislost. Kanonické vektory mají výhodu, že se v nich dobře přemýšlí, další výhody poznáte při studiu pojmu *gradient* (diferenciální počet fcí více proměnných).

7 Slovo na rozloučenou...

Je dobré si uvědomit, že komplexní čísla jsou "automaticky" vynucena jen tím jak člověk zavedl sčítání a jeho "nad-operace" (násobení, umocňování...) [4], při hledání inverzní fce až do zavedení komplexních čísel narazíte na neřešitelný problém. Např. $a + 2 = 0$ nevyřešíte bez zavedení záporných čísel. Opravdová krása matematiky se projeví v aplikacích — bez této oblasti lidského bádání bychom v budoucnu asi neodvrátili naši zkázu (srážka s metoritem, vyhasnutí Slunce apod.) Síla tkví v možnosti **předpovídat** co se stane v budoucnosti! Matematika je kvantitativním **jazykem** pro popisování přírody, počítače jsou "stroje na předpovídání", když jim dáte dobrý **model** reality. Mimochodem víte jak zjistit, že jste v MATRIXu a ne v realitě? — stačí provést experiment, který ověří křivost časoprostoru.

Dnešní "nereálné" hry jsou konstruovány na principech euklidovského prostoru, kde platí: vzdálenost dvou bodů

$$= \| \overrightarrow{h} - \overrightarrow{k} \| = \sqrt{(h_1 - k_1)^2 + (h_2 - k_2)^2 + \ldots + (h_n - k_n)^2}$$

čili pythagorova věta. Euklidovský prostor není zakřivený, ale realita ano! Jeden příklad: trojúhelník, který má všechny úhly pravé — na kouli to možné je (jedna osmina koule).

Doufám, že tento text vyvolal bouřlivé diskuze na téma komplexní čísla a tak podobně ;-))). Just enjoy your free time, free life, free love! Yours 004CZ's async@centrum.cz. LaTeXin type.

Použitá a doporučená literatura:

[1] Feynmanovy přednášky z fyziky 1/3, nakl. FRAGMENT
`ISBN 80-7200-405-0`

[4] Např. $1 + 1 + 1 = 3 \cdot 1, \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$